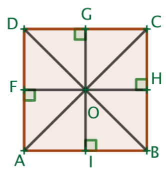
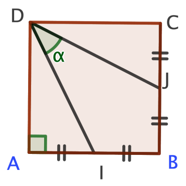
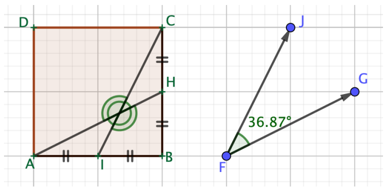
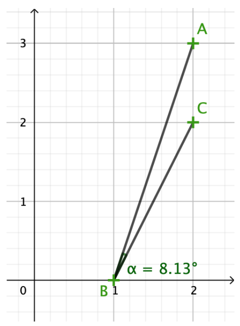
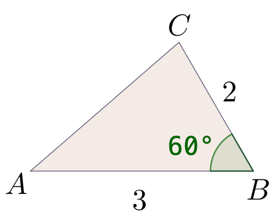
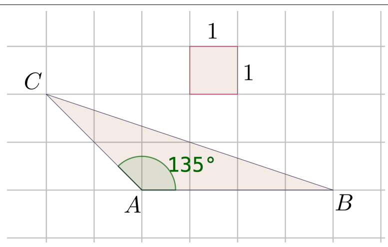
Produit scalaire : applications (dont : calculer un angle)

fichier d'exercices associé à la vidéo Youtube « produit scalaire : calculer un angle »

Des méthodes plus compliquées en bas de la feuille pour la culture générale.

Mais ici dans ce tableau, quasiment uniquement la méthode vue dans la vidéo.

a)	 **Figure 1.** ?.png	Calculer l'angle $\widehat{HAB}$ Dans $(A,\vec{AB},\vec{AD})$, on a $\vec{AB}\cdot\vec{AH}=1$ (par projection) et $AH=\frac{\sqrt{5}}{2}$ d'où $\theta\approx 26,57°$.
b)	 **Figure 2.** JDI.png	Un carré $ABCD$ de côté 1, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et de $[BC]$. On demande l'angle $\alpha:=\widehat{JDI}$. • Par le produit scalaire, $\vec{DI}\cdot\vec{DJ}=\begin{pmatrix}1\\-1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/2\\-1\end{pmatrix}=1$. • Par le cosinus, $\vec{DI}\cdot\vec{DJ}=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\cos\alpha$. → Ainsi, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ soit $\alpha\approx 36,87°$. Autre méthodes voir *b*) plus bas
c)	 **Figure 3.** un représentant de $\vec{AH}$ et de $\vec{IC}$	Dans le carré $ABCD$ suivant de côté 2, on note K l'intersection de $[IC]$ et $[AH]$. Déterminer tous les angles de la figure. $\vec{AH}\cdot\vec{IC}=4=\sqrt{5}^2\times\cos\theta\Leftrightarrow\cos\theta=\frac{4}{5}$ donc les deux petits angles mesurent environ 37°, c'est la même configuration que l'exercice précédent.
d)	 **Figure 4.**	i) Trouver $\alpha:=\hat{B}$ grâce à un produit scalaire. ii) Recommencer avec le calcul de $(\vec{i},\vec{BA})-(\vec{i},\vec{BC})$ par deux « *SOHCAHTOA* ». $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=\sqrt{10}\times\sqrt{5}\times\cos\alpha=5\sqrt{2}\cos\alpha$ $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=7$ et ainsi $\cos\alpha=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}\approx 0,9898$ soit $\alpha\approx 8.13°$. Avec *SOHCAHTOA* : $\tan(\vec{i},\vec{BA})=3$ et $(\vec{i},\vec{BC})=2$ et avec la touche arctan de la calculatrice on retrouve $\alpha\approx 71.57°-63.43°\approx 8.13°$.
e)	 **Figure 5.** 23.png	Calculer $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ Prolonger (AB) pour visualiser l'angle : $\vec{AB}\cdot\vec{BC}=AB\times BC\times\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=3\times 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$
f)	 **Figure 6.** 24.png	Calculer $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$ Au moins trois méthodes : • $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=4\times 2\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-8$; • $\vec{AB}(4,0)\cdot\vec{AC}(-2,2)=-8$; • $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=\overline{AB}\times\overline{AH}=4\times(-2)=-8$.

---

b) autres méthodes

- Plus compliqué : $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $\tan\alpha = \frac{1}{\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$.

  Or $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ d'où $\tan\alpha = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2\times\frac{1}{2}} = \frac{3}{4}$ soit $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$.

- AL-KASHI : $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\times\left(\text{truc}^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\times\left(\begin{pmatrix} 1,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)$

  $\overrightarrow{DI}\cdot\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\times\left(4,5 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\times(4,5-2,5) = 1$

c) autre méthode

Autre méthode : $\widehat{IKH} = 90° + 2\times\widehat{ICB}$ et $\widehat{ICB} = \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$.